Campi magnetici dovuti a correnti elettriche

dott. ing. Lucia FROSINI

Dipartimento di Ingegneria Industriale e dell'Informazione, Università di Pavia

E-mail: lucia@unipv.it

Campi magnetici e induzione elettromagnetica

Premessa: i fenomeni magnetici sono descritti tramite due grandezze:

H = INTENSITÀ DEL CAMPO MAGNETICO (**causa**)

B = INDUZIONE MAGNETICA o densità di flusso magnetico (**effetto**)

L'equazione che lega queste due grandezze nei mezzi lineari è: $\boxed{B = \mu H}$

dove: μ = permeabilità magnetica del mezzo in cui si svolge il campo magnetico.

Dimensionalmente, nel Sistema Internazionale:

B = [T] $\Rightarrow$ B = [V s / m^2] = [Wb / m^2]

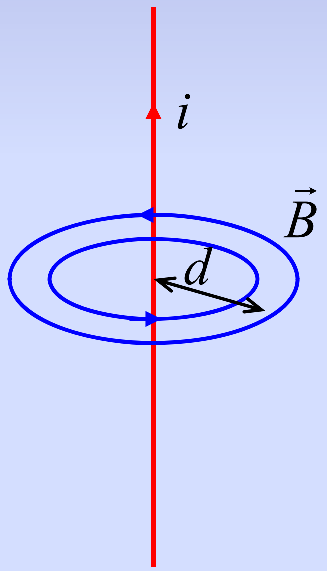
H = [A / m]

μ = [H / m] = [Ω s/m] = [V s / A m]

Un mezzo è detto LINEARE se la sua μ è sempre costante, cioè non presenta i fenomeni né di saturazione né di isteresi magnetica.

Campi magnetici prodotti da correnti elettriche

Il primo fenomeno che evidenziò l'esistenza di una relazione tra i fenomeni elettrici e quelli magnetici fu l'esperimento di Ørsted (1820), che considera il caso più semplice di circuito elettrico:



Un **conduttore rettilineo** percorso da corrente continua e immerso in un mezzo omogeneo lineare di estensione infinita genera intorno a sé un campo magnetico:

→ le linee del campo di induzione magnetica sono di forma circolare, centrate rispetto al conduttore e giacenti in piani ortogonali al conduttore stesso.

Il verso del campo di induzione magnetica è dato dalla regola della mano destra: considerando il pollice nel verso in cui scorre la corrente, il verso del campo di induzione magnetica è dato dal verso di chiusura della mano.

Campi magnetici prodotti da correnti elettriche

Quindi, la corrente che scorre in un circuito elettrico crea attorno a sé un campo di induzione magnetica.

Questo campo teoricamente si estende all'infinito: in realtà la sua intensità è inversamente proporzionale alla distanza dal circuito. Oltre una certa distanza, l'intensità del campo di induzione magnetica risulta trascurabile.

Per un **conduttore rettilineo**, vale la formula di Biot-Savart:

$$\boxed{B = \mu \frac{i}{2\pi d}}$$

(d = distanza del punto considerato dal conduttore)

Dimensionalmente:

$$[\mathrm{T}] = \left[\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}\right] \cdot \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right] = \left[\frac{\Omega \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{m}}\right] \cdot \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right] = \left[\frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}}\right] \cdot \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right] = \left[\frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{m}^2}\right] = \left[\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}^2}\right]$$

Campi magnetici prodotti da correnti elettriche

Il fenomeno sopra esposto corrisponde a una proprietà fondamentale e assolutamente generale di tutte le correnti elettriche, siano esse continue o alternate.

Ogni corrente elettrica si contorna di un campo magnetico: le linee del campo magnetico sono sempre delle linee chiuse intorno alla corrente e la loro forma dipende dalla configurazione geometrica dell'intero circuito elettrico che concorre alla produzione del campo magnetico.

Ciascuna linea del campo magnetico e il circuito elettrico chiuso percorso dalla corrente stanno fra loro nella stessa posizione reciproca che passa tra due anelli consecutivi di una catena.

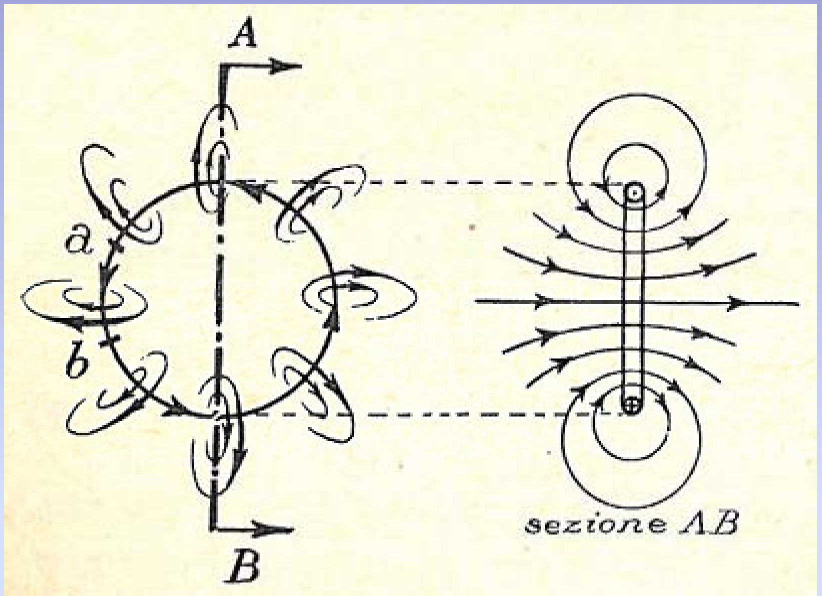
Si esprime questo fatto dicendo che:

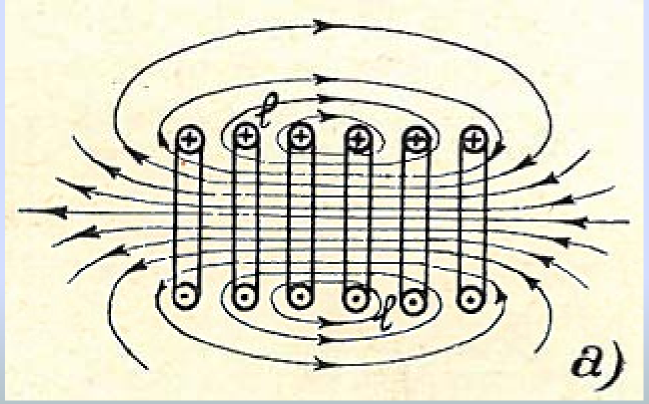
> Le linee del campo di induzione magnetica sono sempre
>
> **CONCATENATE** con il circuito elettrico che le produce.

Campi magnetici prodotti da correnti elettriche

Se il circuito elettrico percorso da corrente ha la forma di una spira circolare, le linee del campo magnetico sono ancora dei cerchi concatenati con la spira, ma tali cerchi sono spostati eccentricamente verso l'esterno.

L'asse della spira rappresenta anch'esso una linea del campo magnetico (cerchio di raggio infinito).





Nelle macchine elettriche (trasformatori, motori, generatori) i circuiti elettrici percorsi da corrente sono generalmente costituiti da più spire circolari contigue: il complesso di queste spire è detto **solenoide**.

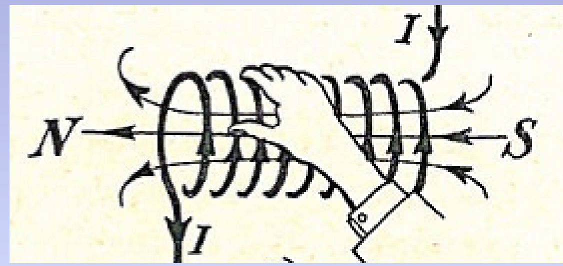
Campi magnetici prodotti da correnti elettriche

Se il solenoide è abbastanza lungo (almeno 5÷7 volte il diametro delle sue spire), l'induzione magnetica al suo interno può essere considerata uniforme e pari a:

$$\boxed{B = \mu \frac{Ni}{l}}$$

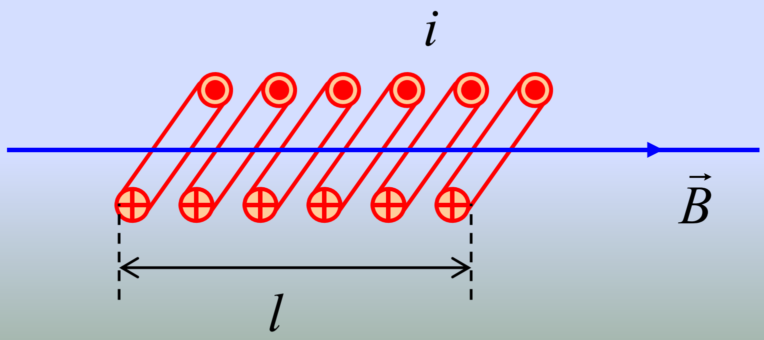
dove: N = n° spire,

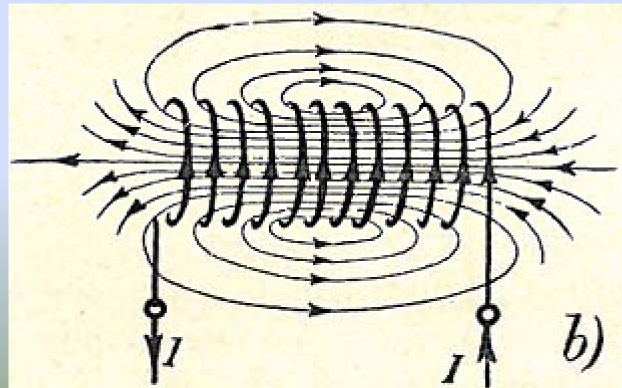
l = lunghezza assiale



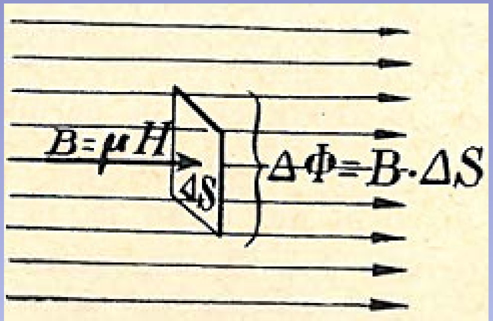
Le linee del campo di induzione magnetica all'interno del solenoide sono perpendicolari alle spire, con un verso che segue la regola della mano destra.

Tali linee si richiudono all'esterno del solenoide, dove il campo magnetico risulta trascurabile: in riferimento a queste linee di campo, si parlerà di "flusso disperso".





Flusso magnetico



Si definisce **flusso magnetico Φ** (o flusso di induzione magnetica):

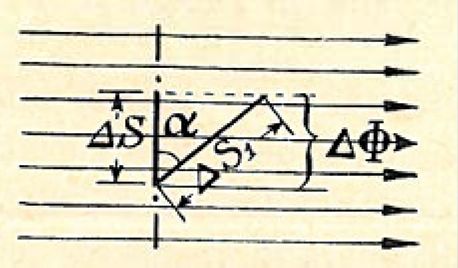
$$\boxed{\Phi = B \cdot A}$$

dove: A = area della superficie ortogonale alle linee di induzione magnetica.

Dimensionalmente: $\boxed{B = \dfrac{\Phi}{A}}$ $[\mathrm{T}] = \left[\dfrac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}^2}\right]$ (per questo B si può chiamare "densità di flusso magnetico", in inglese "flux density")

In generale, per un campo di induzione magnetica uniforme, il flusso Φ che attraversa una qualunque superficie piana di area A è definito come:

$$\Phi = B \cdot A \cdot \cos\alpha$$



dove α è l'angolo di inclinazione della superficie rispetto al piano normale al campo magnetico.

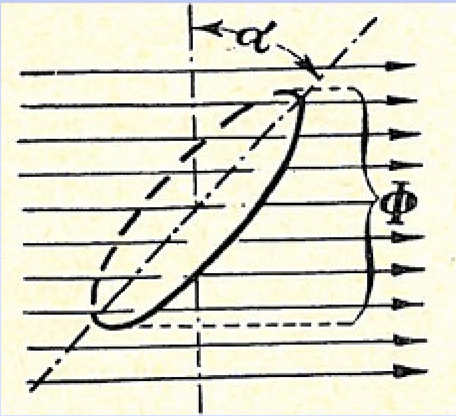
Flusso magnetico concatenato

In particolare, al posto di una superficie generica, possiamo considerare una spira (circuito elettrico chiuso) immersa in un campo magnetico.

In questo caso, il flusso magnetico che attraversa l'area interna alla spira è definito come **flusso magnetico concatenato** col circuito stesso.

Nel caso rappresentato in figura, il flusso concatenato con la spira è ancora dato da:

$$\Phi = B \cdot A \cdot \cos \alpha$$



dove A è l'area della spira e α è l'angolo di inclinazione della spira rispetto al piano normale al campo magnetico.

Questo flusso concatenato è massimo quando la spira è normale al campo magnetico e nullo quando la spira è parallela al campo magnetico.

Flusso magnetico concatenato

Quando il flusso magnetico Φ si concatena con più spire, come nel caso del solenoide, si parla in generale di **flusso magnetico concatenato Ψ**:

$$\boxed{\Psi = N\,\Phi}$$

dove: N = numero di spire con cui il flusso magnetico si concatena.

Fino ad ora abbiamo parlato di **circuiti elettrici** percorsi da corrente che producono un campo di **induzione magnetica**.

Abbiamo detto che, nei mezzi lineari, B = μ H, dove μ dipende dal mezzo in cui si svolge il campo di induzione magnetica:

$$\mu = \mu_0\,\mu_r$$

dove μ_0 = permeabilità magnetica del vuoto = $4\pi\cdot10^{-7}$ H/m.

Circuiti magnetici

In questa relazione, H e B sono rispettivamente la causa e l'effetto della magnetizzazione: a parità di intensità di campo magnetico, il valore assunto dall'induzione dipende dalle caratteristiche del materiale.

La μ_r di un materiale, che è un numero puro, riassume in sé le caratteristiche magnetiche del materiale stesso (a parità di H, è maggiore B se è maggiore μ_r).

La maggioranza delle sostanze presenta un comportamento magnetico molto simile a quello del vuoto:

- se μ_r risulta leggermente < 1, si parla di sostanze diamagnetiche (es.: rame, piombo, acqua, idrogeno);
- se μ_r risulta leggermente > 1, si parla di sostanze paramagnetiche (es. alluminio, stagno, aria, ossigeno).

In entrambi i casi la μ_r è costante e quindi queste sostanze costituiscono dei mezzi lineari.

Circuiti magnetici

Se invece μ_r >>1, si parla di **materiali ferromagnetici**: sono sostanze le cui molecole possiedono un momento magnetico proprio molto elevato.

Per questa ragione, il materiale ferromagnetico, posto in un campo magnetico esterno, si magnetizza notevolmente nello stesso verso del campo, per cui l’intensità di questo risulta notevolmente aumentata.

Appartengono alla categoria dei materiali ferromagnetici il ferro, il nichel, il cobalto e le loro leghe.

Per questi materiali μ_r non è costante, perciò sono materiali non lineari, che presentano fenomeni di saturazione e isteresi magnetica (che riprenderemo più avanti).

Per i materiali ferromagnetici, μ_r = 500÷4000.

Circuiti magnetici

Si può intuire che, se abbiamo un solenoide avvolto attorno a un materiale ferromagnetico, le linee del campo di induzione magnetica saranno per la maggior parte confinate all'interno del materiale stesso.

Si parla di **CIRCUITO MAGNETICO** per definire lo sviluppo delle linee di induzione magnetica che si svolgono prevalentemente entro materiali ferromagnetici.

Si parla di **NUCLEO MAGNETICO** per definire il "corpo" costituito da materiale ferromagnetico che realizza il circuito magnetico.

Il circuito magnetico può essere non costituito interamente da materiale ferromagnetico, ma può presentare delle parti in aria, denominate **traferri**.

Ad esempio, si definisce traferro la corona cilindrica tra rotore e statore di un motore o di un generatore, che permette la rotazione del rotore stesso, e si definiscono traferri le giunzioni tra le parti che costituiscono il nucleo in ferro dei trasformatori.

Circuiti magnetici

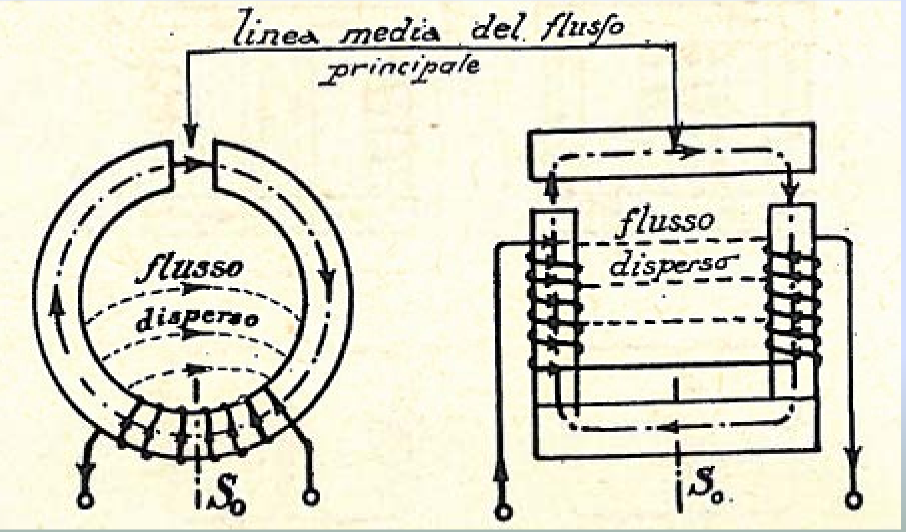
Le linee principali del flusso magnetico sono portate a seguire un percorso determinato dalla forma dell'avvolgimento e dalla forma del nucleo magnetico.

Si può fare un paragone tra il flusso magnetico in un circuito magnetico e la corrente elettrica in un circuito elettrico.

La differenza fondamentale è che nel caso del circuito magnetico occorre tener conto della DISPERSIONE MAGNETICA: alcune linee del campo di induzione magnetica fuoriescono dal circuito magnetico principale e si richiudono in aria.

FLUSSO DISPERSO

Tuttavia, per esprimere le leggi dei circuiti magnetici in modo analogo a quelle dei circuiti elettrici, occorre fare l'ipotesi di flusso disperso nullo.



Circuiti magnetici

Riprendendo l'espressione dell'induzione magnetica all'interno di un solenoide:

$$\boxed{B = \mu \frac{Ni}{l}}$$

e la definizione di flusso magnetico:

$$\boxed{\Phi = B\,A}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi = \frac{\mu A}{l} Ni \quad \Rightarrow \quad Ni = \frac{l}{\mu A} \Phi$$

Analogia con la legge di Ohm:

$$e = R\,i$$

Ni forza magnetomotrice (f.m.m.)

$$\Re = \frac{l}{\mu A}$$ riluttanza [1/H]

$$\Lambda = 1/\Re$$ permeanza [H]

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Phi = \frac{Ni}{\Re}}$$

Analogia con la legge di Ohm

La forza magnetomotrice Ni è analoga alla f.e.m. e

Il flusso Φ è analogo alla corrente i

La riluttanza $\Re$ è analoga alla resistenza R

La riluttanza $\Re$ è direttamente proporzionale alla lunghezza l e inversamente proporzionale alla permeabilità μ e all'area della sezione trasversale A del circuito magnetico, così come la resistenza R è direttamente proporzionale alla lunghezza e inversamente proporzionale alla conduttività e all'area della sezione del circuito elettrico.

Per un circuito magnetico costituito da più parti in serie, ciascuna con un diverso valore di riluttanza $\Re_j$, la forza magnetomotrice totale Ni per produrre un determinato flusso Φ è data da:

$$\boxed{Ni = \Phi \sum \Re_j}$$

Legge di Hopkinson

Circuiti magnetici

I circuiti magnetici sono costituiti prevalentemente da un **nucleo in materiale ferromagnetico** e possono eventualmente presentare delle parti in aria denominate **traferri**.

Esamineremo alcuni circuiti magnetici, di forma più o meno complessa, ma fissa nel tempo (la riluttanza è costante), e valuteremo come la presenza di un **traferro** influisca sul valore della **riluttanza** del circuito magnetico stesso, e di conseguenza influisca sul valore della **corrente** necessaria per generare un determinato **flusso magnetico**.

Si osserva che, in un circuito magnetico costituito da più parti in serie, il flusso <u>Φ è sempre lo stesso per tutte le parti in serie</u>, mentre l’induzione <u>B può assumere diversi valori se sono diverse le aree delle sezioni</u> che costituiscono il circuito magnetico.

Solitamente l’obiettivo è calcolare la f.m.m. necessaria per determinare un certo valore di Φ o di B in tutto o in parte del circuito.

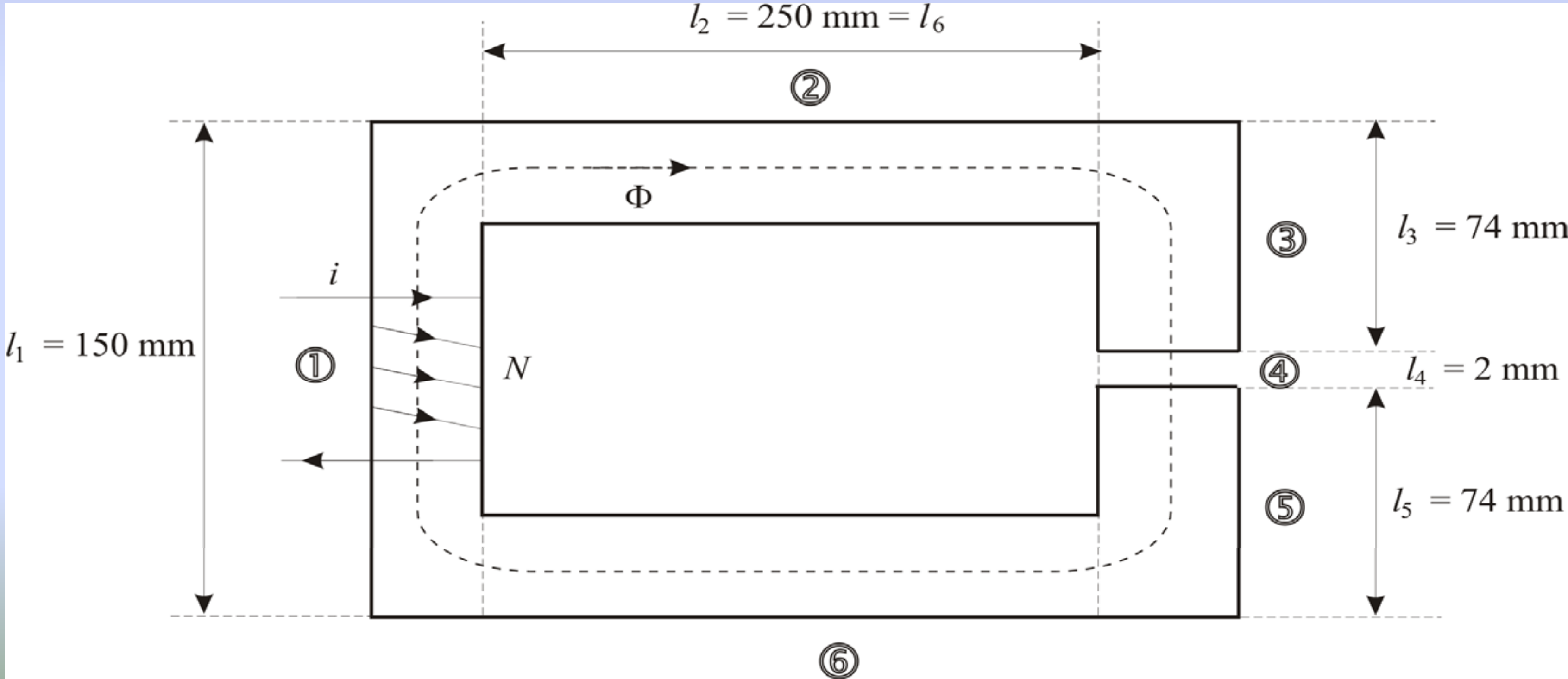
Circuito magnetico semplice con traferro

Esercizio 1:

Consideriamo un circuito magnetico semplice, costituito da un **nucleo in ferro** con **un traferro**. La corrente che percorre l'avvolgimento è i = 1 A.

Vogliamo avere un campo di induzione magnetica al traferro: B_t = 1,2 T.

Calcoliamo il numero di spire N necessarie.



Circuito magnetico semplice con traferro

Consideriamo costante la permeabilità relativa μ_r del ferro (ipotesi di linearità) e calcoliamo i valori di riluttanza delle varie parti che compongono il circuito magnetico con la formula:

$$\boxed{\Re_j = \frac{l_j}{\mu_0 \mu_{rj} A_j}}$$

con $\mu_r = 3000$

①	$l_1 = 150$ mm	$A_1 = 80$ mm^2	$\Re_1 = 497359$ H^{-1}	
②	$l_2 = 250$ mm	$A_2 = 125$ mm^2	$\Re_2 = 530516$ H^{-1}	
③	$l_3 = 74$ mm	$A_3 = 100$ mm^2	$\Re_3 = 196291$ H^{-1}	
④	**$l_4 = 2$ mm**	**$A_4 = 100$ mm^2**	**$\Re_4 = 15915494$ H^{-1}**	**(traferro)**
⑤	$l_5 = 74$ mm	$A_5 = 100$ mm^2	$\Re_5 = 196291$ H^{-1}	
⑥	$l_6 = 250$ mm	$A_6 = 125$ mm^2	$\Re_6 = 530516$ H^{-1}	

$$\Re_{tot} = \sum \Re_j = \Re_1 + \Re_2 + \Re_3 + \Re_4 + \Re_5 + \Re_6 = 17866469 \quad \text{H}^{-1}$$

L. Frosini

Circuito magnetico semplice con traferro

<u>Nota</u>: la riluttanza del traferro $\mathfrak{R}_4$ è pari a circa il 90% della riluttanza totale $\mathfrak{R}_{tot}$.

Il flusso desiderato al traferro è dato da:

$$\Phi = \mathrm{B}_t A_4 = 1{,}2 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 120 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{Wb}$$

<u>Questo flusso è lo stesso che attraversa tutto il circuito magnetico</u>: se le varie parti che compongono il circuito magnetico hanno diversa sezione, il valore dell'induzione B sarà diverso in ciascuna sezione.

La **forza magnetomotrice** necessaria per produrre il flusso Φ è data da:

$$Ni = \Phi \sum \mathfrak{R}_j = \Phi\, \mathfrak{R}_{tot} = 120 \cdot 10^{-6} \cdot 17866479 = 2144\ \ \mathrm{A}$$

Di conseguenza, se i = 1 A, il numero di spire necessarie sarà N = 2144.

Circuito magnetico semplice con traferro

Consideriamo separatamente la riluttanza del **nucleo magnetico** e quella del **traferro**:

$$\Re_f = \Re_1 + \Re_2 + \Re_3 + \Re_5 + \Re_6 = 1950974 \ \ \mathrm{H}^{-1}$$

$$\Re_t = \Re_4 = 15915494 \ \ \mathrm{H}^{-1}$$

La caduta di potenziale magnetico nel **ferro** è:

$$\Phi \Re_f = 120 \cdot 10^{-6} \cdot 1950974 = 234 \ \ \mathrm{A}$$

La caduta di potenziale magnetico nel **traferro** è:

$$\Phi \Re_t = 120 \cdot 10^{-6} \cdot 15915494 = 1910 \ \ \mathrm{A}$$

Ovviamente, la somma delle cadute di potenziale nel ferro e nel traferro è pari alla f.m.m. *Ni* calcolata precedentemente.

Circuito magnetico semplice senza traferro

Se consideriamo lo stesso circuito magnetico, ma **senza traferro**, troviamo che:

$$\Re_{tot} = 1956280 \quad H^{-1}$$

Mantenendo uguale a prima il valore richiesto di campo di induzione magnetica nel ramo 3-4-5 pari a 1,2 T, e quindi il valore richiesto di Φ pari a $120 \cdot 10^{-6}$ Wb, si ricava la **forza magnetomotrice** necessaria per produrlo:

$$Ni = \Phi \, \Re_{tot} = 120 \cdot 10^{-6} \cdot 1956280 = 235 \ \text{A}$$

Di conseguenza, se i = 1 A, il numero di spire necessarie sarà N = 235.

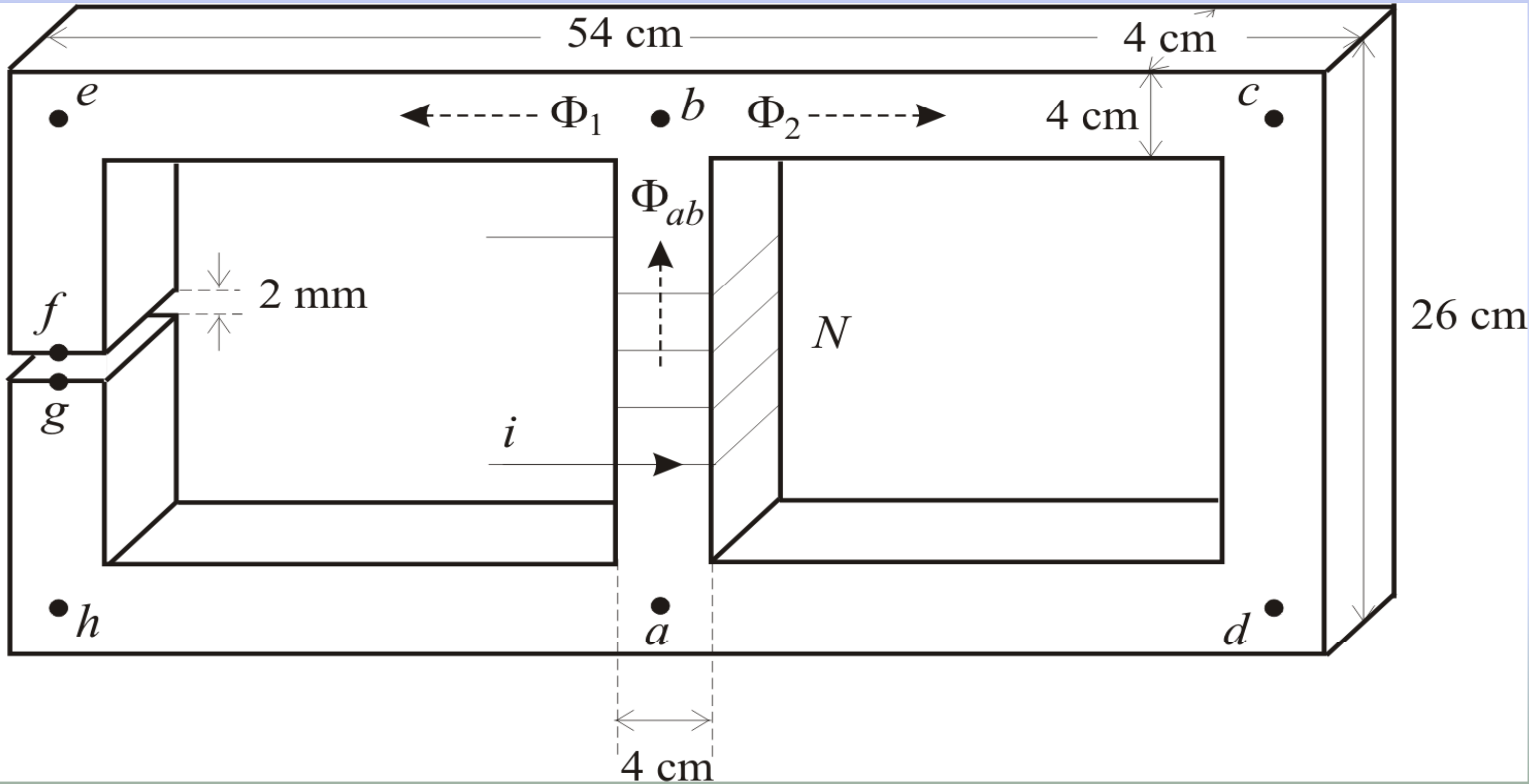
Circuito magnetico complesso con traferro

Esercizio 2:

Consideriamo un circuito magnetico più complesso **con traferro**.

$N = 100$ $i = 10$ A $\mu_r = 1000$

Vogliamo calcolare il valore del flusso Φ_{ab} che percorre il tronco centrale.



Circuito magnetico complesso con traferro

Calcoliamo la **riluttanza** delle varie parti che compongono il circuito magnetico e quindi utilizziamo l'analogia coi circuiti elettrici per calcolare la riluttanza complessiva di tutto il circuito magnetico.

$$\Re_{ab} = \frac{l_{ab}}{\mu_0 \mu_r A} = \frac{0{,}22}{1000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}04^2} = 109419 \text{ H}^{-1}$$

$$\Re_{bcda} = \frac{l_{bcda}}{\mu_0 \mu_r A} = \frac{0{,}25 + 0{,}22 + 0{,}25}{1000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}04^2} = 358099 \text{ H}^{-1}$$

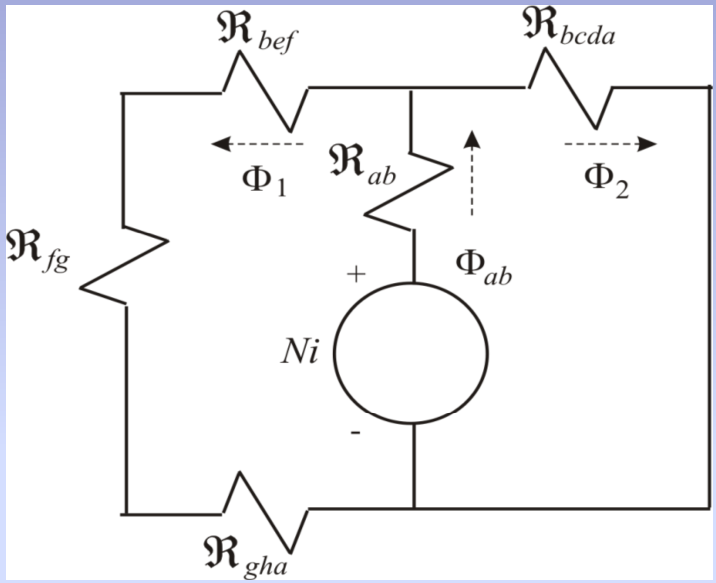
Trascurando lo spessore del traferro: $\Re_{bef} = \Re_{gha} = \dfrac{\Re_{bcda}}{2} = 179049 \text{ H}^{-1}$

Riluttanza del **traferro**:

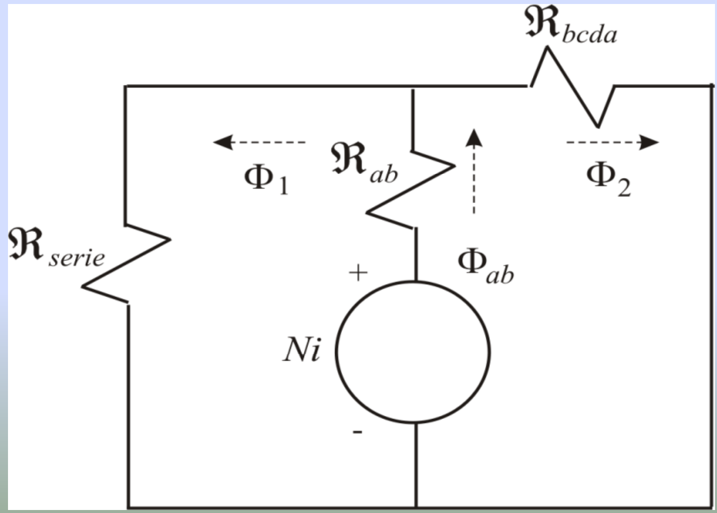
$$\Re_{fg} = \frac{l_{fg}}{\mu_0 A} = \frac{0{,}002}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}04^2} = 994718 \text{ H}^{-1}$$

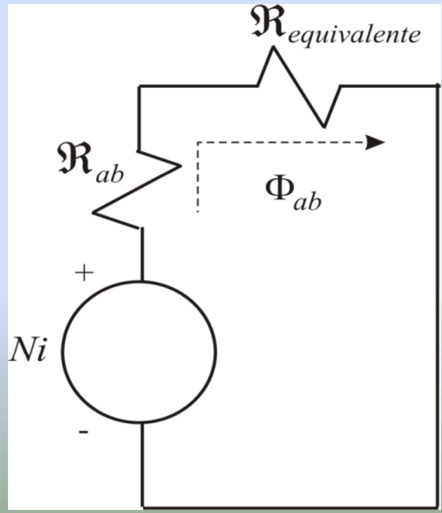
Circuito magnetico complesso con traferro

Il circuito elettrico equivalente è:



Possiamo semplificare il circuito elettrico equivalente calcolando dapprima la riluttanza $\Re_{serie}$, pari alla serie delle tre riluttanze appartenenti alla prima maglia, e quindi la riluttanza $\Re_{equivalente}$, pari al parallelo tra la $\Re_{serie}$ e la $\Re_{bcda}$.





Circuito magnetico complesso con traferro

$$\Re_{serie} = \Re_{bef} + \Re_{fg} + \Re_{gha} = 1352817 \text{ H}^{-1}$$

$$\Re_{equiv.} = \frac{\Re_{serie} \cdot \Re_{bcda}}{\Re_{serie} + \Re_{bcda}} = 283148 \text{ H}^{-1}$$

$$\Phi_{ab} = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{Ni}{\Re_{ab} + \Re_{equiv.}} = 0{,}002547 \text{ Wb}$$

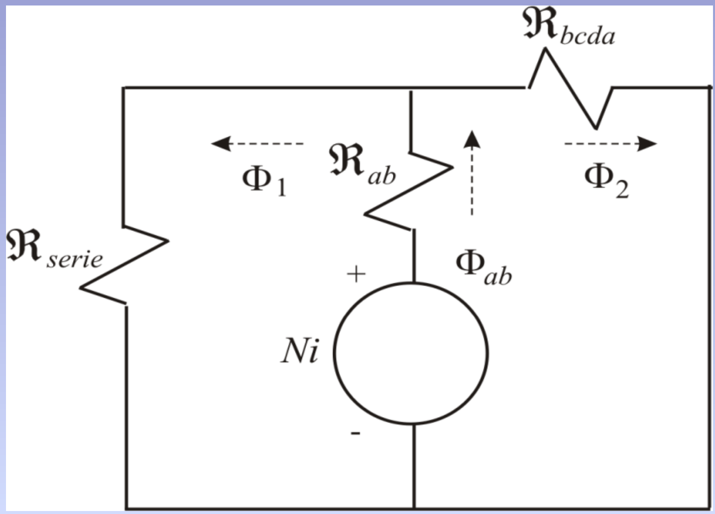
È possibile calcolare i flussi Φ_1 e Φ_2 con l'analogo del partitore di corrente:

$$\Phi_1 = \frac{\Re_{bcda}\,\Phi_{ab}}{\Re_{bcda} + \Re_{serie}} = 0{,}000533 \text{ Wb}$$

$$\Phi_2 = \frac{\Re_{serie}\,\Phi_{ab}}{\Re_{bcda} + \Re_{serie}} = 0{,}002014 \text{ Wb}$$

Circuito magnetico complesso con traferro

In alternativa, è possibile calcolare i flussi Φ_1 e Φ_2 considerando separatamente le due maglie del circuito equivalente: il "generatore" di f.m.m. *Ni* è considerato con la convenzione dei generatori, mentre le riluttanze sono bipoli utilizzatori.



Maglia 1:

$$Ni = \Re_{serie}\Phi_1 + \Re_{ab}\Phi_{ab} \Rightarrow \Phi_1 = \frac{Ni - \Re_{ab}\Phi_{ab}}{\Re_{serie}} = 0{,}000533 \text{ Wb}$$

Maglia 2:

$$Ni = \Re_{bcda}\Phi_2 + \Re_{ab}\Phi_{ab} \Rightarrow \Phi_2 = \frac{Ni - \Re_{ab}\Phi_{ab}}{\Re_{bcda}} = 0{,}002014 \text{ Wb}$$

Oppure: $\Phi_2 = \Phi_{ab} - \Phi_1 = 0{,}002547 - 0{,}000533 = 0{,}002014 \text{ Wb}$

Circuito magnetico complesso con traferro

È poi possibile calcolare la **caduta di potenziale magnetico** sulle diverse riluttanze.

La caduta di potenziale sulle riluttanze $\Re_{serie}$ e $\Re_{bcda}$ è la stessa, essendo tali riluttanze tra loro in parallelo:

$$\Re_{serie}\Phi_1 = \Re_{bcda}\Phi_2 = \Re_{equiv.}\Phi_{ab} = Ni - \Re_{ab}\Phi_{ab} = 721 \text{ A}$$

La caduta di potenziale sul solo **traferro** è pari a:

$$\Re_{fg}\Phi_1 = 530 \text{ A}$$

Si osservi come la caduta di potenziale sul **traferro** rappresenti la quota prevalente del percorso in serie b-e-f-g-h-a, sebbene la lunghezza del traferro (2 mm) sia quasi trascurabile rispetto alla lunghezza di tutto il percorso (72 cm).

Induzione elettromagnetica

Fino a qui abbiamo parlato di flussi magnetici costanti nel tempo, prodotti da correnti continue che percorrono avvolgimenti fissi nello spazio.

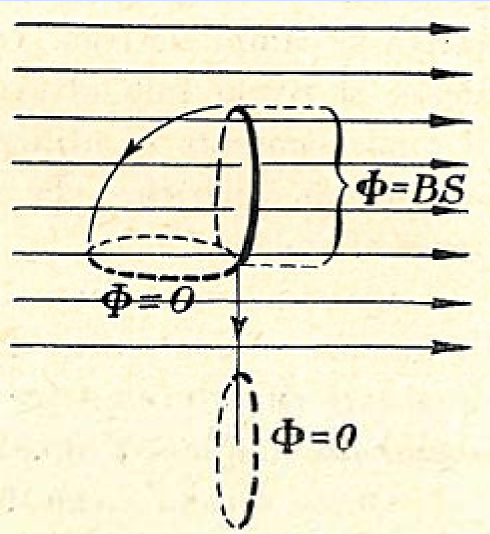
Le cose diventano più interessanti quando i flussi magnetici variano nel tempo.

Poiché vale la relazione: $\boxed{\Phi = B\ A}$

il flusso magnetico varia:

1) quando varia l'induzione: B varia se varia la f.m.m. che la produce, ossia se varia i, ossia se il solenoide è alimentato con una corrente di intensità variabile nel tempo $\Rightarrow$ anche Φ sarà variabile nel tempo ($\Phi \propto B \propto i$);

2) quando varia la superficie attraversata dal flusso: A varia se la spira con cui si concatena il flusso si muove o si deforma.



Induzione elettromagnetica

Cosa succede quando varia il flusso magnetico concatenato con un circuito elettrico?

➡ Nasce una forza elettromotrice (f.e.m.) indotta:

$$\boxed{e = -\frac{d\Phi}{dt} \neq 0} \qquad [\mathrm{V}] = \left[\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{s}}\right] \quad \Rightarrow \quad [\mathrm{Wb}] = [\mathrm{V} \cdot \mathrm{s}]$$

Questo è il fenomeno dell'induzione elettromagnetica o legge di Faraday.

In generale, quando il flusso è concatenato con N spire:

$$\boxed{e = -\frac{d\Psi}{dt}}$$

Il segno meno ha il seguente significato: la f.e.m. indotta nel circuito elettrico ha sempre un verso tale da determinare una reazione che contrasta e tende a rallentare il processo di induzione che la genera.

Induzione elettromagnetica

Se il circuito elettrico è chiuso, la f.e.m. indotta vi fa circolare una certa corrente *i*: questa corrente indotta produce a sua volta un campo magnetico indotto che agisce in modo da contrastare il campo magnetico induttore.

Il segno meno traduce il principio di conservazione dell'energia:

➡ La corrente prodotta si oppone alla variazione del flusso magnetico: se il flusso concatenato è in diminuzione, il campo magnetico generato dalla corrente indotta sosterrà il campo originario opponendosi alla diminuzione, mentre se il flusso sta crescendo, il campo magnetico prodotto contrasterà l'originario, opponendosi all'aumento.

Questa è la legge di Lenz: il verso delle correnti indotte è tale da generare un campo magnetico che si oppone alla variazione del flusso del campo magnetico concatenato con il circuito.

L. Frosini

Autoinduzione

Considerando un circuito elettrico costituito da N spire percorso da corrente i:

corrente i ⇒ campo di induzione magnetica B (le cui linee sono sempre concatenate con il circuito elettrico che le ha generate) ⇒ flusso magnetico concatenato Ψ

$$\boxed{\Psi = N\,\Phi = N\,\mathrm{B}\,A}$$

<u>Se la corrente è variabile</u>:

corrente i variabile ⇒ flusso magnetico concatenato Ψ variabile ⇒ f.e.m. autoindotta

fenomeno della AUTOINDUZIONE

Autoinduzione

Se μ è costante, sappiamo che: $B \propto i \Rightarrow \Psi \propto i$

Si definisce la seguente costante di proporzionalità:

$$L = \frac{\Psi}{i} \Rightarrow \boxed{\Psi = L\, i}$$

L = autoinduttanza

Dimensionalmente: $\left[\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A}}\right] = \left[\frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{A}}\right] = [\Omega \cdot \mathrm{s}] = [\mathrm{H}]$

Inoltre, dalle seguenti equazioni si ricava il legame tra induttanza e riluttanza:

$$\begin{cases} \Psi = N\Phi \\ \Phi = \dfrac{Ni}{\Re} \\ \Psi = L\, i \end{cases} \Rightarrow Li = \frac{N^2 i}{\Re} \Rightarrow \boxed{L = \frac{N^2}{\Re}}$$

Autoinduzione

Il segno corretto da usare nella relazione derivante dalle leggi di Faraday e Lenz dipende dalla convenzione di segno adottata per studiare il circuito elettrico. Con la convenzione degli utilizzatori, abbiamo la seguente equazione alla maglia:

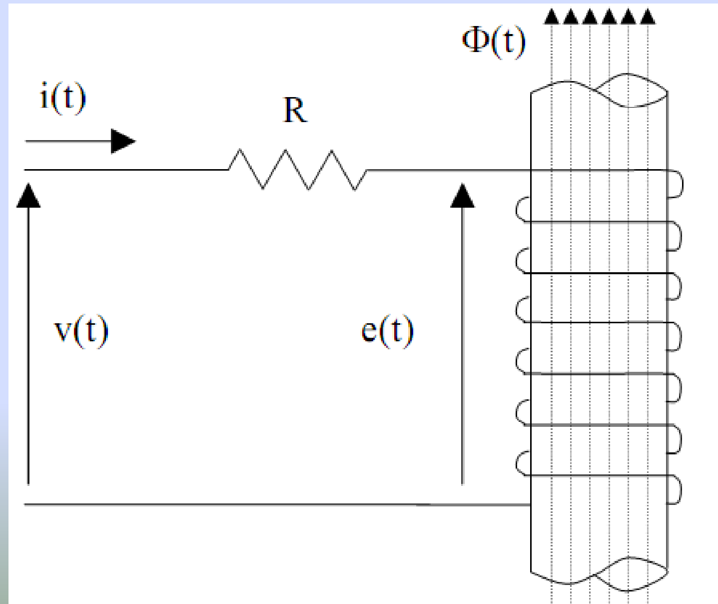
$$v(t) = R \cdot i(t) + e(t)$$

Allora deve risultare: $e = +\dfrac{d\Psi}{dt} \longrightarrow \boxed{v(t) = R \cdot i(t) + \dfrac{d\Psi}{dt}}$

In pratica, oltre alla caduta di tensione ohmica, si verifica anche una caduta di tensione induttiva.

Nel caso in cui L è costante, ritroviamo l'equazione contenente il bipolo utilizzatore detto "induttore lineare":

$$\boxed{v(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di}{dt}}$$



Autoinduzione

Quindi, a seconda del segno, si ha:

$$e = \pm \frac{d\Psi}{dt} \quad \Rightarrow \quad e = \pm \frac{d(Li)}{dt}$$

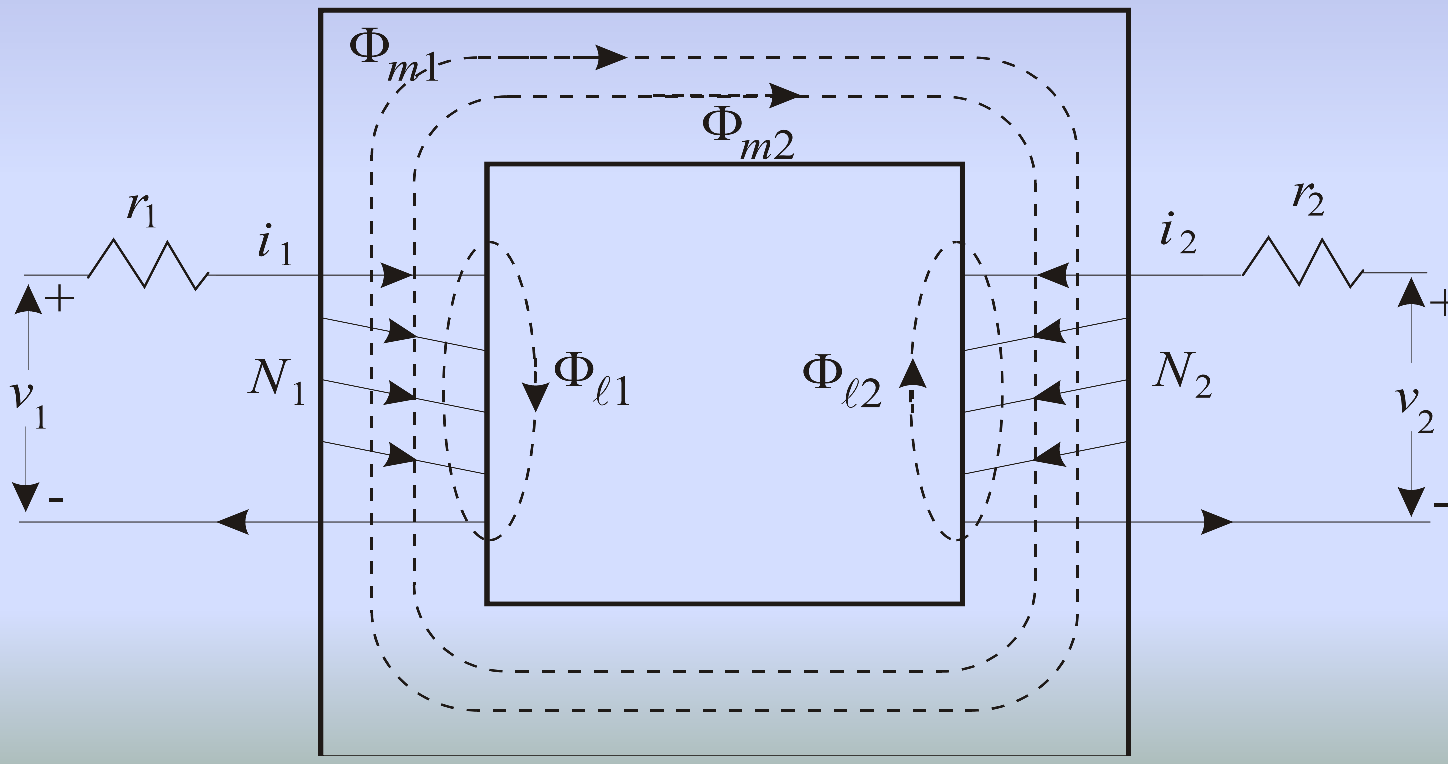
Se L è costante (ossia, se è costante la riluttanza del circuito magnetico $\Re$):

$$\boxed{e = \pm L \frac{di}{dt}}$$

Se invece la riluttanza del circuito magnetico è variabile nel tempo, la f.e.m. indotta assumerà un'altra espressione.

Circuiti magneticamente accoppiati

Il caso più semplice di circuiti magneticamente accoppiati consiste in due avvolgimenti rispettivamente di N_1 e N_2 spire avvolti su un nucleo comune di materiale ferromagnetico (principio alla base dei trasformatori).



Mutua induzione

Se due circuiti elettrici sono disposti in modo tale per cui tutto o una parte del flusso generato da un circuito si concateni con l'altro, si ha il fenomeno della MUTUA INDUZIONE:

$$\begin{cases} \Psi_{21} = M\, i_1 & \text{flusso magnetico dovuto al 1° circuito e concatenato col 2°} \\ \Psi_{12} = M\, i_2 & \text{flusso magnetico dovuto al 2° circuito e concatenato col 1°} \end{cases}$$

Tralasciando il segno:

$$\begin{cases} e_{21} = \dfrac{d\Psi_{21}}{dt} = \dfrac{d\,(M\, i_1)}{dt} \\[2ex] e_{12} = \dfrac{d\Psi_{12}}{dt} = \dfrac{d\,(M\, i_2)}{dt} \end{cases}$$

se M è costante:

$$e_{21} = M\,\frac{d i_1}{dt}$$

$$e_{12} = M\,\frac{d i_2}{dt}$$

Circuiti magneticamente accoppiati

Il flusso prodotto da ciascun avvolgimento può essere separato in:

• **flusso disperso** (indicato col pedice ℓ)

• **flusso magnetizzante** (indicato col pedice m)

Il **flusso disperso** prodotto da uno dei due avvolgimenti si concatena solo con questo avvolgimento: di fatto, questo flusso è “disperso” ai fini della trasformazione dell’energia, in quanto si concatena solo con l’avvolgimento che lo ha prodotto.

Il **flusso magnetizzante** invece, sia che sia prodotto dall’avvolgimento 1, sia che sia prodotto dall’avvolgimento 2, è concatenato con entrambi gli avvolgimenti.

Circuiti magneticamente accoppiati

Il flusso che concatena ciascun avvolgimento è dato da:

$$\begin{cases} \Phi_1 = \Phi_{\ell 1} + \Phi_{m1} + \Phi_{m2} \\ \Phi_2 = \Phi_{\ell 2} + \Phi_{m2} + \Phi_{m1} \end{cases}$$

$\Phi_{\ell 1}$ è prodotto dalla corrente che fluisce nell'avvolgimento 1 e concatena solo le spire dell'avvolgimento 1 (le sue linee si richiudono in aria)

$\Phi_{\ell 2}$ è prodotto dalla corrente che fluisce nell'avvolgimento 2 e concatena solo le spire dell'avvolgimento 2 (le sue linee si richiudono in aria)

Φ_{m1} è prodotto dalla corrente che fluisce nell'avvolgimento 1 e concatena tutte le spire degli avvolgimenti 1 e 2

Φ_{m2} è prodotto dalla corrente che fluisce nell'avvolgimento 2 e concatena tutte le spire degli avvolgimenti 1 e 2

Circuiti magneticamente accoppiati

Se il circuito magnetico può essere considerato lineare:

$$\Phi_{\ell 1} = \frac{N_1 i_1}{\Re_{\ell 1}} \qquad \Phi_{\ell 2} = \frac{N_2 i_2}{\Re_{\ell 2}}$$

$$\Phi_{m 1} = \frac{N_1 i_1}{\Re_m} \qquad \Phi_{m 2} = \frac{N_2 i_2}{\Re_m}$$

Le linee del flusso disperso si svolgono prevalentemente in aria:

$\Rightarrow$ le riluttanze di dispersione hanno un valore molto più elevato rispetto alla riluttanza magnetizzante:

$$\Re = \frac{l}{\mu A}$$

il flusso disperso è al massimo qualche per cento del flusso magnetizzante.

Circuiti magneticamente accoppiati

$$\begin{cases} \Phi_1 = \dfrac{N_1 i_1}{\Re_{\ell 1}} + \dfrac{N_1 i_1}{\Re_m} + \dfrac{N_2 i_2}{\Re_m} \\[2ex] \Phi_2 = \dfrac{N_2 i_2}{\Re_{\ell 2}} + \dfrac{N_2 i_2}{\Re_m} + \dfrac{N_1 i_1}{\Re_m} \end{cases}$$

I **flussi concatenati** sono dati da:

$$\begin{cases} \Psi_1 = N_1 \Phi_1 \\ \Psi_2 = N_2 \Phi_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Psi_1 = \dfrac{N_1^2}{\Re_{\ell 1}} i_1 + \dfrac{N_1^2}{\Re_m} i_1 + \boxed{\dfrac{N_1 N_2}{\Re_m} i_2} \rightarrow \boxed{\Psi_{12}} \\[2ex] \Psi_2 = \dfrac{N_2^2}{\Re_{\ell 2}} i_2 + \dfrac{N_2^2}{\Re_m} i_2 + \boxed{\dfrac{N_2 N_1}{\Re_m} i_1} \rightarrow \boxed{\Psi_{21}} \end{cases}$$

Circuiti magneticamente accoppiati

Si osserva che i coefficienti dei primi due termini di ciascuna equazione sono indipendenti dall'esistenza dell'altro avvolgimento, per questo motivo sono definiti **autoinduttanze**:

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\Re_{\ell 1}} + \frac{N_1^2}{\Re_m} = L_{\ell 1} + L_{m1}$$

$$L_2 = \frac{N_2^2}{\Re_{\ell 2}} + \frac{N_2^2}{\Re_m} = L_{\ell 2} + L_{m2}$$

I coefficienti del terzo termine di ciascuna equazione sono uguali fra loro e rappresentano la **mutua induttanza**:

$$M = \frac{N_1 N_2}{\Re_m} = \frac{N_2 N_1}{\Re_m}$$

Circuiti magneticamente accoppiati

Dalle equazioni precedente si chiarisce il motivo per cui:

$$\boxed{0 \leq M \leq \sqrt{L_1 \cdot L_2}}$$

$$L_{\ell 1} = 0 \Rightarrow L_1 = L_{m1} = \frac{N_1^2}{\Re_m}$$

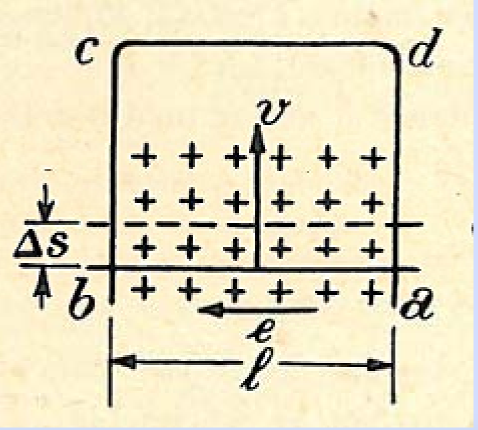
$$L_{\ell 2} = 0 \Rightarrow L_2 = L_{m2} = \frac{N_2^2}{\Re_m}$$

Solo nel caso in cui il flusso disperso sia nullo, si ha: $M = \sqrt{L_1 \cdot L_2}$

F.e.m. indotta in un conduttore in movimento

Riprendiamo le leggi di Faraday e Lenz nel caso in cui sia costante il campo di induzione magnetica B, ma sia variabile la superficie *A* della spira con cui si concatena il flusso magnetico.

È il caso di un conduttore rettilineo *ab* di lunghezza *l* che si muove con velocità *v* in un piano perpendicolare alle linee del campo di induzione magnetica e forma, insieme ad un altro conduttore *cd*, una spira chiusa di superficie *A* variabile nel tempo.



La variazione *dA* della superficie della spira nell'intervallo infinitesimo *dt* è data da:

$$\frac{dA}{dt} = l \cdot \frac{ds}{dt} = l \cdot v$$

Di conseguenza, nella spira si ha la seguente f.e.m. indotta (a meno del segno):

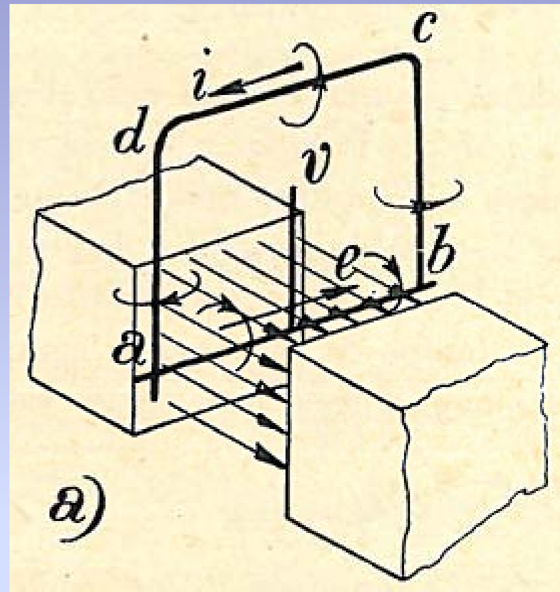
$$\boxed{e} = \frac{d\Phi}{dt} = B\,\frac{dA}{dt} = B \cdot l \cdot \frac{ds}{dt} = \boxed{B \cdot l \cdot v}$$

L. Frosini

F.e.m. indotta in un conduttore in movimento

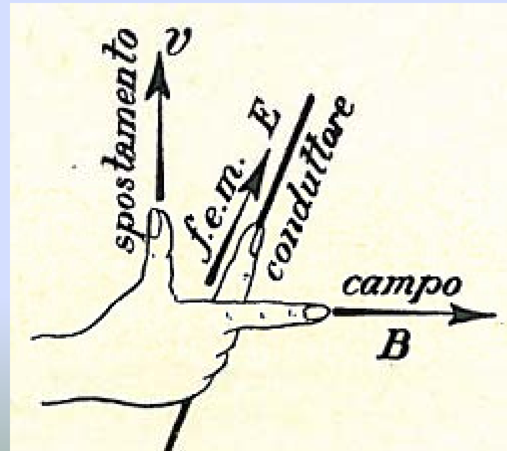
Il verso della f.e.m. indotta è determinato in base alle seguenti considerazioni:

- Spostando il conduttore *ab* verso l'alto, la superficie *A* diminuisce e quindi diminuisce il flusso concatenato con la spira.
- Di conseguenza, la f.e.m indotta nel conduttore *ab* è diretta in modo da far circolare (convenzione dei generatori) una corrente che rallenta questa diminuzione di flusso, producendo a sua volta un campo indotto concorde con il campo induttore.



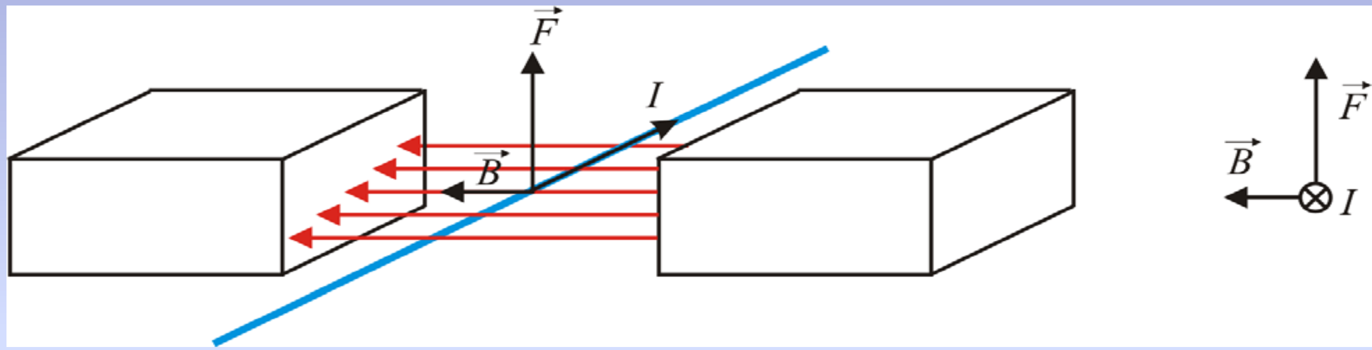
Per individuare il verso della f.e.m. indotta, si può anche far ricorso alla seguente equazione vettoriale:

$$\boxed{\vec{e} = \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot l}$$



Forza di Lorentz

Osserviamo ora il fenomeno che si verifica quando un conduttore percorso da corrente I è immerso in un campo magnetico B:

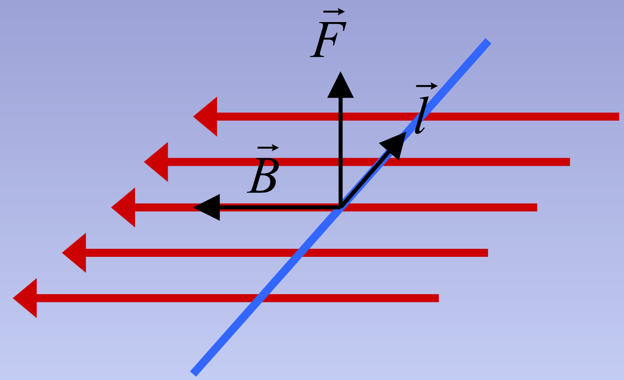


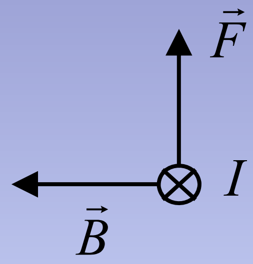
Sul conduttore si sviluppa una forza elettrodinamica F (forza di Lorentz) data dal prodotto vettoriale tra il vettore che rappresenta un conduttore di lunghezza l in direzione e verso del flusso di corrente I e il vettore che rappresenta le linee del campo magnetico B:

$$\boxed{\vec{F}_{Lorentz} = I\left(\vec{l} \wedge \vec{B}\right)}$$

Forza di Lorentz

La direzione della forza di Lorentz, come risultante del prodotto vettoriale, è perpendicolare sia al campo magnetico *B* sia alla corrente *I*.





Il verso della forza di Lorentz è dato dalla regola della mano destra, come risultante di un prodotto vettoriale: il primo vettore è rappresentato dal pollice, il secondo vettore dall'indice, la risultante dal medio.

Il modulo della forza *F* è dato da: $\boxed{F = B \cdot I \cdot l}$

dove *l* è la lunghezza della parte di conduttore interessata dal campo magnetico *B*.

Dimensionalmente:

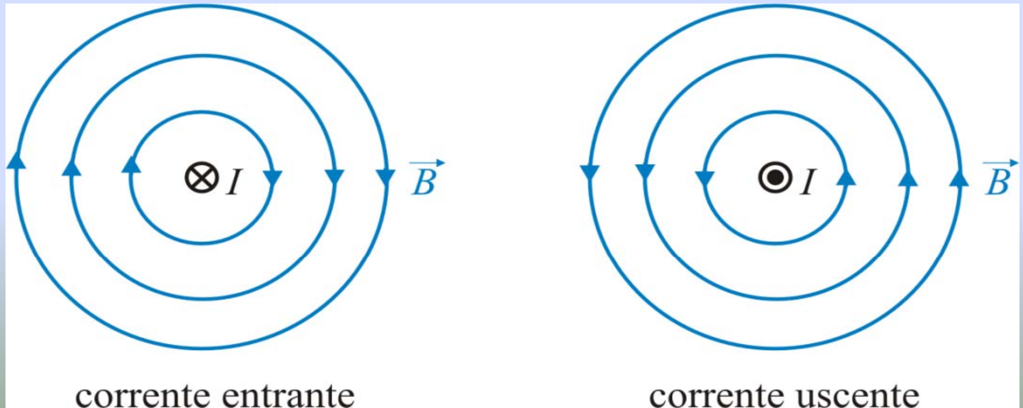
$$[\mathrm{N}] = [\mathrm{T}][\mathrm{A}][\mathrm{m}] = \left[\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}^2}\right][\mathrm{A}][\mathrm{m}] = \left[\frac{\mathrm{V}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{m}^{\cancel{2}}}\right][\mathrm{A}][\cancel{\mathrm{m}}] = \left[\frac{\mathrm{V}\cdot\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{m}}\right]$$

Forza di Lorentz

Abbiamo visto in questa lezione che un conduttore rettilineo percorso da corrente *I*, immerso in un mezzo omogeneo lineare, crea intorno a sé un campo di induzione magnetica, le cui linee sono di forma circolare, centrate rispetto al conduttore e giacenti in piani ortogonali al conduttore stesso. L'intensità dell'induzione magnetica prodotta dalla corrente *I* è data da:

$$\boxed{B = \frac{\mu I}{2\pi d}}$$

Di conseguenza, si ha che, tra due conduttori percorsi da corrente si instaurano delle forze, di attrazione o di repulsione a seconda dei versi delle correnti, dovute al campo magnetico creato da un conduttore e agente sull'altro.



μ = permeabilità magnetica del mezzo

d = distanza dal conduttore

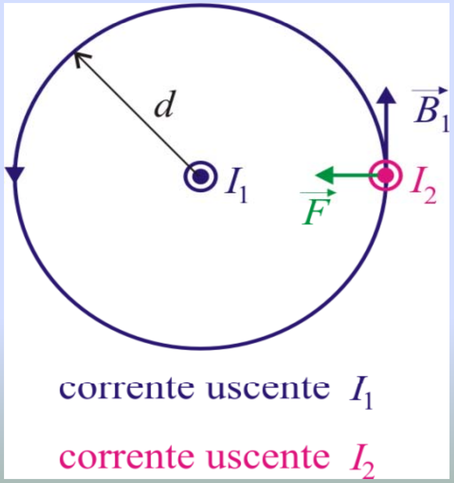
Forza di Lorentz

1° CASO: il conduttore di lunghezza l percorso da corrente I_2 è immerso in un campo magnetico B_1 prodotto dalla corrente I_1:

$$\boxed{B_1 = \frac{\mu I_1}{2\pi d}}$$

Di conseguenza, il conduttore percorso da corrente I_2 è sottoposto a una forza elettrodinamica F nel verso determinato dalla regola della mano destra (prodotto vettoriale):

$$\boxed{F = B_1 \cdot I_2 \cdot l = \frac{\mu I_1 I_2 l}{2\pi d}}$$



Forza di Lorentz

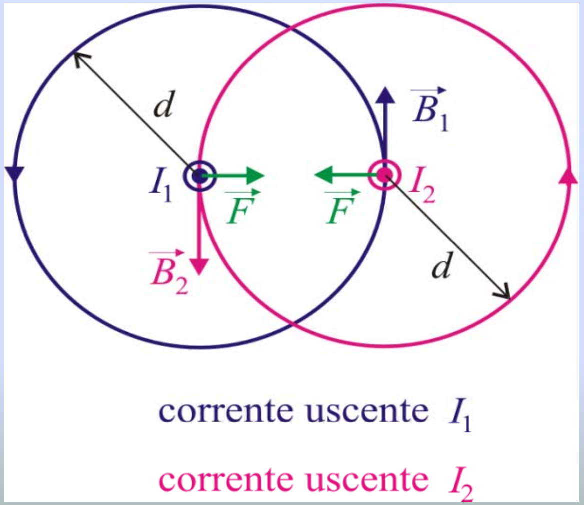
Analogamente, il conduttore di lunghezza l percorso da corrente I_1 è immerso in un campo magnetico B_2 prodotto dalla corrente I_2:

$$\boxed{B_2 = \frac{\mu I_2}{2\pi d}}$$

Di conseguenza, il conduttore percorso da corrente I_1 è sottoposto a una forza elettrodinamica F nel verso determinato dalla regola della mano destra (prodotto vettoriale):

$$\boxed{F = B_2 \cdot I_1 \cdot l = \frac{\mu I_2 I_1 l}{2\pi d}}$$

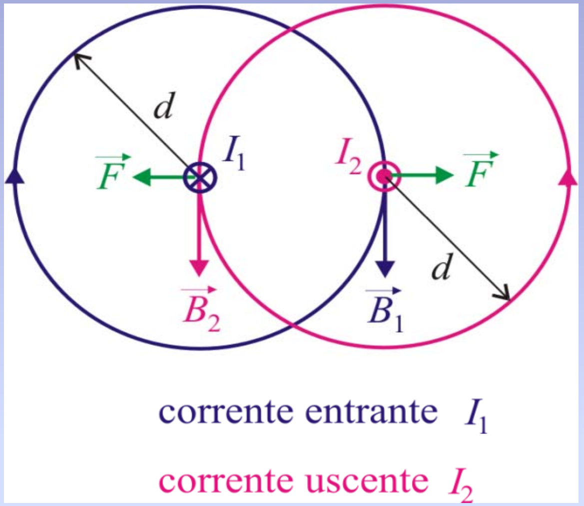
Questa forza F è di attrazione se i conduttori sono percorsi da correnti concordi (entrambe uscenti o entrambe entranti).



Forza di Lorentz

2° CASO: se i conduttori sono percorsi da correnti discordi, si ha:

$$\boxed{F = \frac{\mu I_1 I_2 l}{2\pi d}}$$



Questa forza F è di <u>repulsione</u> se i <u>conduttori sono percorsi da correnti discordi</u> (una uscente e una entrante).

Riassumendo: <u>tra due conduttori percorsi da corrente si instaurano delle forze</u> dovute al campo magnetico creato da un conduttore e agente sull'altro:

- forze di attrazione, se i conduttori sono percorsi da correnti concordi;
- forze di repulsione, se i conduttori sono percorsi da correnti discordi.

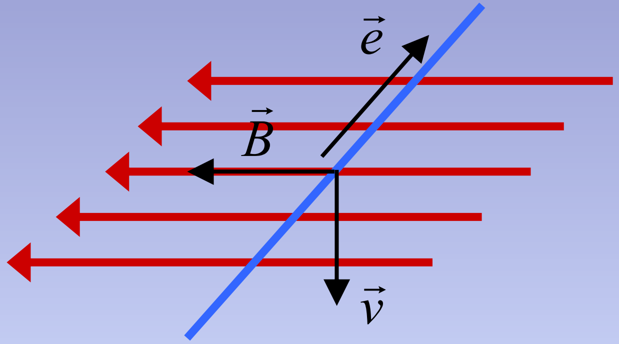
Forze di Lorentz

Quindi, due conduttori di lunghezza *l*, percorsi da corrente *i* e posti a una distanza reciproca *d* all'interno di un mezzo di permeabilità magnetica μ sono soggetti a una forza proporzionale al quadrato della corrente *i*:

$$F_{Lorentz} = i \cdot l \cdot \left(\frac{\mu i}{2\pi d} \right) = \frac{\mu l}{2\pi d} i^2$$

Queste forze si manifestano in tutte le macchine elettriche (trasformatori, motori, generatori) e sono alla base della generazione della coppia elettromeccanica delle macchine rotanti, ma anche delle vibrazioni che si verificano tra avvolgimenti (ad es., tra gli avvolgimenti primario e secondario dei trasformatori e sulle testate dei motori e dei generatori). L'ampiezza di queste forze risulta relativamente contenuta durante il funzionamento normale delle macchine, mentre può risultare molto elevata e addirittura distruttiva nel caso di corto circuito. In regime p.a.s., la pulsazione di questa forza è pari al doppio della frequenza della corrente che la genera, ossia 100 Hz nel caso di alimentazione a frequenza industriale (50 Hz).

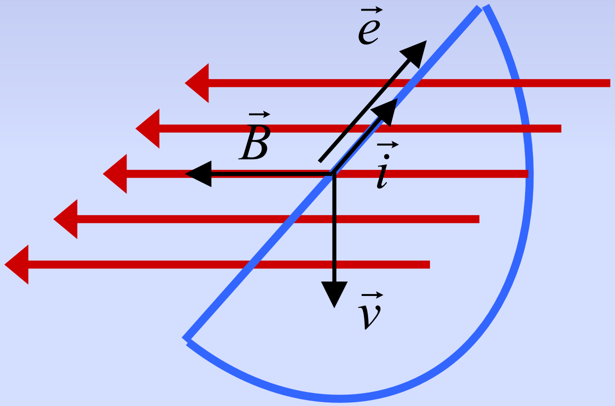
Riassumendo …



Nel conduttore che si muove in un campo magnetico si induce una tensione (legge di Faraday):

$$\boxed{\vec{e} = \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot l}$$

Chiudendo il circuito, in esso si genera una corrente:



La corrente, essendo all'interno di un campo magnetico, crea una forza che si oppone al movimento (legge di Lorentz e legge di Lenz):

$$\boxed{\vec{F} = i\left(\vec{l} \wedge \vec{B}\right)}$$